1043. 確率過程ノ differentiation

伊藤　清（内閣統計局）

§1. P－可測性ニ就テ．（Ω, F, P）ヲ確率ノ場トシ、$x(\omega)$ヲコノ上デ定義セラレタXノ上ノ値ヲトル函數トスル。$x(\omega)$ガ確率変數ト云ハレルタメニハ，ソレガP－可測デアルコトガ必要デアルガ、P－可測性ノ定義ノタメニ普通行ハレル方法ハ次ノ如キモノデアル。即チXノ部分集合ノ系σヲ考ヘ、σニ属スル任意ノ集合ノxニヨル Urbild ガP－可測ノ時、xハP－可測（σ）デアルトイフ。σヲ含ム最小ノ完全加法族ヲB_σトスルト，xガP－可測（σ）ナラバ，xハ必然的ニP－可測（B_σ）トナル。

Xガ抽象空間ノ場合ニ於テモ、Xノアル点aヲ含ム$\mathfrak{S}$ノスベテノ集合ノ共通集合ガaソノモノデアルヤウニ$\mathfrak{S}$ヲ選ブコトハ望マシイ。又Xガ位相空間ノ時ニハ$\mathfrak{S}$トシテスベテノ近傍ヲ元トスル集合ヲ選ブコトガ普通デアル。故ニ$\mathfrak{S}$ナル集合系ノ代リニ、位相ヲ表ハス記号ヲ用ヒテモヨイワケデアル。例ヘバ函数空間ノ場合ニ weak topology ニ関聯シテイフ時ニハ P-measurable (w. t.) トイフ風ニアラハシタリ、又Xニ距離ρガ入ッテヰル時ニハ P-measurable (ρ) トイフガ如キデアル。

§2. 筆者ガ前談話ニモ述ベタル如ク、條件附確率法則$P_{\eta/\xi}$ハ確率法則ナル函数ヲ値トスル確率変数デアルガ、ソノ場合コレハP-可測(w. t.)デアッタノデアル。然シηガ確率変数ノ場合ニハ$P_{\eta/\xi}$ハ実数空間ノ上ノ確率法則ヲ値トスル確率変数デアッテ、実数空間ノ上ノ確率変数ノ集合ニハ所謂 Frechet ノ距離ρガ定義出来ルノデ、$P_{\eta/\xi}$ガP-可測ナリヤ否ヤヲ問題ニスルコトハ自然ナ道筋デアル。答ハ肯定的デ、ソノ証明モ容易デアルガ、一應ヤッテ見ヤウ。

今F_1, F_2ヲ実数空間ノ上ノ確率法則トスルトキ、$y=F_1\{(-\infty, x)\}$, $y=F_2\{(-\infty, x)\}$ノグラフヲ書キ不連続点ニ於テハ、$x+0$ニ對應スル点ト$x-0$ニ對應スル点トヲ結ブト、二ツノ連続曲線ガ得ラレル。$x+y=a$ $(-\infty<a<+\infty)$ナル直線ハ各グラフヲ唯一点ニ於テ截ル。

コノ截点ノ距離ノ上限（aヲ動カス時ノ）——實ハ「最大」ナル事ガスグニ分ル——ガF_1トF_2トノ間ノ*Frechet*ノ距離デアル。

コノ距離ニ関シテアル確率法則Fノε-近傍$U(F,\varepsilon)$ヲ考ヘテ見ヨウ。$x+y=a$ナル直線ガ$y=F_1\{(-\infty,x)\}$ノグラフヲ截ル点ヲ$p(a)$トシ，$p(a)$カラ$x+y=a$ニ沿ッテεダケ距ッタ点ノ中，上方ニアルモノヲ$Q_1(a)$，下方ニアルモノヲ$Q_2(a)$トスル。aヲ動カス時$Q_1(a)$及ビ$Q_2(a)$ハ連續的ニ変化スルガ、ソノ描ク曲線ヲ夫々C_1, C_2トスル。C_1 C_2ハアル非減少有界函數$y=f_2(x)$ノグラフデアルト云ヘル。Fノε-近傍$U(F,\varepsilon)$ C_1 C_2ノ間ニ挾マレタ部分ノ中，グラフニ對應スル確率法則ノ集合デアル。

偖テ$f_1(x)$，$f_2(x)$ガ共ニ連続デアルヤウナ点ハ到ル点稠密デアッテ、ソノ中カラ可附番個$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\text{------}$ヲトッテ、之レガ矢張リ到ル所稠密デアルヤウニ出来ル。スルト

$$\overline{U(F,S)}=\bigcap_{i=1}^{\infty}F\{G;\ f_2(\lambda_i)\leqq G((-\infty,\lambda_i))\leqq f_1(\lambda_i)\}\qquad(1)$$

トナル。（$\overline{U}$ノ上ノ横線ハUノ*abgeschlossene Hülle*ヲ表ハス）

モトニモドリ、$P_{\eta/\xi}$ハP-可測（$w.t.$）ナル故

$$P_{\eta/\xi}\in E\{G;\ f_2(\lambda_i)\leqq G((-\infty,\lambda_i))\leqq f_1(\lambda_i)\}$$

即チ　$f_2(\lambda_i)\leqq P_{\eta/\xi}((-\infty,\lambda_i))\leqq f_1(\lambda_2)$

ハ P－可測デアル。故ニ(1)ニヨリ

$$P_{\eta/\xi} \in \overline{U(F, \varepsilon)}$$

モ P－可測デアル。

$$U(F, \varepsilon) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \overline{U(F, \tfrac{n-1}{n}\varepsilon)}$$

ナル故

$$P_{\eta/\xi} \in U(F, \varepsilon)$$

モ亦 P－可測デアル。即チ $P_{\eta/\xi}$ ハ P－可測 (P) デアル。

§3. x ヲ區間 (0, 1) ノ上ノ確率過程トスル。即チ (0, 1) 上デ定義セラレタ實函數ノ空間ヲ値域トスル確率變數トスル。ソノ P－可測性ハ weak topology ニ關聯セシメテ定義スル。

t ヲ (0, 1) 間ノ實數トスルトキ，x_t ハ x ノ t ニ對スル値トスル。x_t ガ P－可測ナルコトハ明ラカデ、之ハ一ツノ確率變數デアル。區間 (0, 1) ノ一部分 (t, s) ノ上デ x ヲ考ヘテ (t, s) 上ノ確率過程ヲ得ル。之ヲ x_{ts} ニテアラハス。x_{ot} ガ定マッタ時ノ $x_{t_1} - x_t$ $(t_1 > t)$ ノ條件附確率法則 $P_{x_{t_1}-x_t/x_{ot}}$ ヲ考ヘヨウ。之レハ前節ニヨリ P－可測 (P) デアル。

$$\underset{\substack{t_1 \to s+ \\ t_1 \to s-}}{p\text{-}\lim} \left(P_{x_{t_1}-x_t/x_{ot}}\right)^{*\left[\frac{1}{t'-t}\right]}$$

［ [λ] ハ λ ノ整數部分ヲ表ハシ
＊ハ convolution ヲ表ハス ］

ガ存在スルトキ、確率過程 x ハ s ニ於テ微分可能トイヒ、コノ極限値ヲ $D_s x$ ニテアラハス。$D_s x$ ハ確率法則ヲ値トスル．Ω 上ノ函数デ、而モ P－可測 (ρ) デアル。又 $D_s x$ ガ x_{0s} ノ函数ナルコトモ容易ニ分ル。而シテ

limit law (of probability) ハ無限ニ分解可能デアル。(Khintchine) ニヨリ $D_s x$ ハ無限分解可能ナルコトガ分ル。

§4. $D_s x$ ガ無限ニ分解可能トスレバ、ソノ特性函数ノ對数ハ P. Lévy ノ定理ニヨリ

$$imz-\frac{\sigma^2}{2}z^2+\oint_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)\left(\oint_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{-0}+\int_{0}^{+\infty}\right)$$

ニテ表ハサレルワケデアル。而シテ次ノ (2) (3) (4) ハ Khintchine ノ

Déduction nouvelle d'une formule de P. Lévy

ノ方法ニナラッテ容易ニ証明出来ル。[1]

$$\lim_{\substack{t_1\to s+\\ t\to s-}}\frac{1}{t_1-t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{1+u^2}P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}(d\lambda)=m \tag{2}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\substack{t_1\to s+\\ t\to s-}}\int_{-\infty}^{\delta}u^2P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}(d\lambda)=\sigma^2 \tag{3}$$

$$\frac{1}{t_1-t}P_{x_{t_1}-x_t/x_{0t}}\xrightarrow[(\rho)]{}n \tag{4}$$

---

(1) Bull. de l'univ. d'état à Moscou, Ser. inter. Math. et Mec. vol 1. Fasc. 1. 1937.

茲ニ P ハ Fréchet ノ距離ニナラッテ定義スルコトトシ n ノグラフハ

$$y = n(-\infty, x) \qquad (x > 0)$$

$$y = -n(x, +\infty) \qquad (x < 0)$$

ノグラフトシ、$\frac{1}{t_1-t}P_{x_{t_1}-x_t/x_0t}$ ノグラフモ同様ニ定義スル。(2)(3)(4) ニヨリ m, σ, n ガ確率変数ナルコトガワカル。n ハ実数軸カラ 0 ヲノゾイタ部分ノ上ノ測度ヲ値トスルモノデ、ソノ P－可測性ハ上ノ P ニ関聯シテ定義スルノデアル。

特ニ $n=0$ ノ場合ニハ

(2) ノ代リニ

$$\lim_{\substack{t_1 \to s+ \\ t \to s-}} \frac{1}{t_1-t}\int_{-\delta}^{\delta} u\, P_{x_{t_1}-x_t/x_0t}(d\lambda) = m \qquad (2')$$

(3) ノ代リニ

$$\lim_{\substack{t_1 \to s+ \\ t \to s-}} \frac{1}{t_1-t}\int_{-\delta}^{\delta} u^2 P_{x_{t_1}-x_t/x_0t}(d\lambda) = \sigma^2 \qquad (3')$$

(4) ノ代リニ

$$\frac{1}{t_1-t} P_{x_{t_1}-x_t/x_0t}(E) \to 0 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{E ハ 0 カラ } \delta \text{ ノ距離ダケ} \\ \text{離ッタ集合トスル}\end{array}\right) \qquad (4')$$

ガ出ルコトモ容易ニ証明出来ル。